2026年全国硕士研究生招生考试试题及参考答案

(数学一)

By Liii STEM

一、选择题：1～10小题,每小题5分,共50分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。请将所选选项前的字母填 在答题卡指定位置。

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-az=e^{y+az}$ （a 为非零常数）确定，则（ ）

(A) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$　(B) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$　(C) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{a}$　(D) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{a}$

【答案】A

【解析】由微分形式不变性得 $\mathrm{d}x-a\mathrm{d}z=e^{y+az}(\mathrm{d}y+a\mathrm{d}z)$,

整理得 $(\mathrm{a}e^{y+az}+a)\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-e^{y+az}\,\mathrm{d}y$,

故 $\mathrm{d}z=\dfrac{1}{a}\left[\dfrac{1}{e^{y+az}+1}\mathrm{d}x+\dfrac{-e^{y+az}}{e^{y+az}+1}\mathrm{d}y\right]$,

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{e^{y+az}+1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{-e^{y+az}}{e^{y+az}+1}\right)$,

显然 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{a}$。

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}$ 的收敛域为（ ）

(A) [-2, 2]　(B) [-1, 1]　(C) (-2, 2)　(D) (-1, 1)

【答案】D

【解析】 由题知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3+(-1)^n}{4}\right)^n x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}x^{4n+2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}$,

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}$ 的收敛域为 $(-1,1)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}x^{4n+2}$ 的收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$,

且当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时发散，故收敛域为 $(-1,1)$，选 D。

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 [-1, 1] 上有定义，则（ ）

(A) 当 $f(x)$ 在 (-1, 0) 内单调递减，在 (0, 1) 内单调递增时，$f(0)$ 为极小值

(B) 当 $f(0)$ 为极小值时，$f(x)$ 在 (-1, 0) 内单调递减，在 (0, 1) 内单调递增

(C) 当 $f(x)$ 的图形在 [-1, 1] 上是凹的时，$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 [-1, 1] 上单调递增

(D) 当 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 [-1, 1] 上单调递增时，$f(x)$ 的图形在 [-1, 1] 上是凹的

【答案】C

【解析】

对 A 选项，取 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$，知 $f(0)$ 不是极小值，排除。

对 B 选项，取 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，知 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调，但仍满足 $f(0)$ 是极小值，排除。

对 C 选项，若 $f(x)$ 的图形在 $[-1,1]$ 上是凹的（即凸函数，二阶导数非负或满足凸性定义），则对任意 $x_1<x_2<1$，有 $\dfrac{f(1)-f(x_1)}{1-x_1}\leq\dfrac{f(1)-f(x_2)}{1-x_2}$，即 $\dfrac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1}\leq\dfrac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}$，故差商 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 上单调递增。因此 C 正确。

对 D 选项，取 $f(x)=|x|$ 时，$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 单调，但 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 不是凹曲线，排除。

4. 已知有界区域 Ω 由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成，函数 $f(u)$ 连续，则 $\iiint_\Omega f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V=$

(A) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}f(r^2+z^2)\,r\,\mathrm{d}z$

(B) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{4-r^2}}f(r^2+z^2)\,r\mathrm{d}z$

(C) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2}f(\rho^2)\,\rho^2\mathrm{d}\rho$

(D) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2}f(\rho^2)\,\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$

【答案】C

【解析】令 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$，

则 $\iiint_\Omega f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\displaystyle\int_0^{2\pi}d\,\theta\int_0^{\pi/4}d\,\varphi\int_0^{2}f(r^2)\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$。

5. 单位矩阵经若干次互换两行得到的矩阵为置换矩阵，A 为 n 阶置换矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则（ ）

(A) A^* 为置换矩阵
(B) A^{-1} 为置换矩阵
(C) $A^{-1}=A^*$
(D) $A^{-1}=-A^*$

【答案】B

【解析】设 $A=E_{i,k}E_{k,k}L\cdot E_{i,k}$，由于 $(E_{\mathrm{ij}})^T=E_{\mathrm{ji}}$，$(E_{\mathrm{ij}})^{-1}=E_{\mathrm{ij}}$，

故 $A^{-1}=(E_{i,k})^{-1}L(E_{k,k})^{-1}(E_{i,k})^{-1}=E_{i,k}L\cdot E_{k,k}E_{i,k}$，仍为置换矩阵，故选 B。

由于 $A^*=|A|\cdot A^{-1}=(-1)^n A^{-1}$，$n$ 为偶数时，为置换矩阵；n 为奇数时，不为置换矩阵，故 A、C、D 错。

6. 设 A, B 为 n 阶矩阵，β 为 n 维列向量，若 A 的列向量组可由 B 的列向量组线性表示，则（ ）

(A) 当 $Ax=\beta$ 有解时，$Bx=\beta$ 有解

(B) 当 $A^T x=\beta$ 有解时，$B^T x=\beta$ 有解

(C) 当 $Bx=\beta$ 有解时，$Ax=\beta$ 有解

(D) 当 $B^T x=\beta$ 有解时，$A^T x=\beta$ 有解

【答案】A

【解析】当 $\mathrm{Bx}=\beta$ 有解时，则 β 可由 B 的列向量组表示，而 B 的列向量组可由 A 的列向量组表示，故 β 可由 A 的列向量组表示，即有 $\mathrm{Bx}=\beta$ 时 $\mathrm{Ax}=\beta$。

7. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，若方程 $f(x_1,x_2,x_3)=-1$ 表示的曲面为圆柱面，则（ ）

(A) $a=-4$，且 f 的规范形为 $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(B) $a=-4$，且 f 在正交变换下的标准形为 $-6y_1^2-6y_2^2$

(C) $a=2$，且 f 的规范形为 $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(D) $a=2$，且 f 在正交变换下的标准形为 $-6y_1^2-6y_2^2$

【答案】B

【解析】由 $f(x_1,x_2,x_3)=-1$，得 $-f(x_1,x_2,x_3)=1$。

圆柱面对应 $p=2,q=0$，故 $-f(x_1,x_2,x_3)$ 的特征值为 2 个正，1 个 0。因此 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的特征值为 2 个负，1 个 0。

由 $A=\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$，知其特征值为 $a-2$，$a-2$，$a+4$；于是 $a=-4$，三个特征值为 $-6,-6,0$。于是标准形为 $-6y_1^2-6y_2^2$。

8. 设随机变量 $X\sim N(1,2)$，令 $f(t)=E[(X+t)^2]$，则 $f(t)$ 的最小值点和最小值分别为（ ）

(A) 1, 2　　(B) 1, 4　　(C) -1, 2　　(D) -1, 4

【答案】C

【解析】

由 $f(t)=E(X^2+2\,\mathrm{tX}+t^2)=E(X^2)+2\,\mathrm{tEX}+t^2=2+1^2+2t+t^2=t^2+2t+3$,

则令 $f'(t)=2t+2=0$，解得驻点为 $t=-1$;

又 $f''(t)=2>0$，所以 $t=-1$ 为唯一的极小值点，即最小值点,

且最小值为 $f(-1)=1-2+3=2$，故选 C。

9. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，随机变量 Y 的分布函数为 $F(\mathrm{ay}+b)$，X 的数学期望为 μ，方差为 σ^2。若 Y 的数学期望和方差分别为 0 和 1，则（ ）

(A) $a=\sigma,b=\mu$　　(B) $a=\sigma,b=-\mu$　　(C) $a=\dfrac{1}{\sigma},b=\mu$　　(D) $a=\dfrac{1}{\sigma},b=-\mu$

【答案】A

【解析】

设 X 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)$；Y 的分布函数为 $F(\mathrm{a}y+b)$，密度函数为 $\mathrm{af}(\mathrm{a}y+b)$，$a>0$。

由题意，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，即 $E(X^2)=\mu^2+\sigma^2$；

其中：$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{x}f(x)\,\mathrm{d}x=\mu$，$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x=\mu^2+\sigma^2$；

又 $E(Y)=0$，$D(Y)=1$，故 $E(Y^2)=0^2+1^2=1$。

$$\begin{aligned}
E(Y)&=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot\mathrm{af}(\mathrm{a}y+b)\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{y}f(\mathrm{a}y+b)\,d(\mathrm{a}y+b)\\
&=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{a}y+b-b)\,f(\mathrm{a}y+b)\,d(\mathrm{a}y+b)\\
&=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{a}y+b)\,f(\mathrm{a}y+b)\,d(\mathrm{a}y+b)-\frac{b}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(\mathrm{a}y+b)\,d(\mathrm{a}y+b)\\
&=\frac{1}{a}E(X)-\frac{b}{a}\cdot 1\\
&=\frac{\mu-b}{a}\\
&=0
\end{aligned}$$

所以 $b=\mu$。

$$\begin{aligned}
E(Y^2)&=\int_{-\infty}^{\infty}y^2\cdot\mathrm{af}(\mathrm{a}y+b)\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}y^2\,f(\mathrm{a}y+b)\,d(\mathrm{a}y+b)\\
&=\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}[(\mathrm{a}y+b)^2-2\,\mathrm{ab}y-b^2]\,f(\mathrm{a}y+b)\,d(\mathrm{a}y+b)\\
&=\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{a}y+b)^2\,f(\mathrm{a}y+b)\,d(\mathrm{a}y+b)-\frac{2\,b}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{a}y+b-b)\,f(\mathrm{a}y+b)\,d(\mathrm{a}y+b)-\\
&\quad\frac{b^2}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}f(\mathrm{a}y+b)\,d(\mathrm{a}y+b)\\
&=\frac{1}{a^2}E(X^2)-\frac{2\,b}{a^2}E(X)+\frac{2\,b^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\\
&=\frac{\mu^2+\sigma^2-2\,b\mu+b^2}{a^2}\\
&=1
\end{aligned}$$

由于 $b=\mu$，所以 $\frac{\sigma^2}{a^2}=1$，且 $a>0$，所以 $a=\sigma$。

综上可知：$\begin{cases}a=\sigma\\ b=\mu\end{cases}$，答案选 A。

10. 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=k)=\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^k},k=1,2,\cdots$，则对于正整数 m,n，有（ ）

(A) $P(X>m+n|\,X>m)=P(X>m)$

(B) $P(X>m+n|\,X>m)=P(X>n)$

(C) $P(X>m+n|\,X>m)>P(X>m)$

(D) $P(X>m+n|\,X>m)>P(X>n)$

【答案】D

【解析】

$$\begin{aligned}P\{X>m\}&=\sum_{k=m+1}^{\infty}P\{X=k\}\\&=\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^k}\right)\\&=\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{3^{m+1}}\\&=\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{X>m+n|\,X>m\}&=\frac{P(X>m+n)}{P(X>m)}\\&=\frac{\frac{1}{2^{m+n+1}}+\frac{1}{3^{m+n}}}{\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{3^m}}\\&=\frac{\frac{1}{2^{m+1}}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^m}\cdot\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{3^m}}\end{aligned}$$

记 $a=\frac{1}{2^{m+1}}$，$b=\frac{1}{3^m}$，则 $P\{X>m+n|\,X>m\}=\frac{a\cdot\frac{1}{2^n}+b\cdot\frac{1}{3^n}}{a+b}$；

而 $P(X>n)=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^n}$，

计算差：$P\{X>m+n|\,X>m\}-P(X>n)=\frac{a\cdot\frac{1}{2^n}+b\cdot\frac{1}{3^n}}{a+b}-\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^n}\right)$，

以 $a=\frac{1}{2^{m+1}}$，$b=\frac{1}{3^m}$ 代入化简，可得 $=\frac{\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)\left(\frac{1}{3^m}-\frac{1}{2^m}\right)}{2\left(\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{3^m}\right)}$，

因为 $\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}>0$，$\frac{1}{3^m}-\frac{1}{2^m}>0$（当 $m\geq 1$），分子分母均正，故

$$P\{X>m+n|\,X>m\}>P(X>n)$$

因此选择 **D**。

二、填空题：11～16小题，每小题5分，共30分。

11. 设向量 $\vec{v}_1=(0,x,z),\vec{v}_2=(y,0,1)$，令 $\vec{F}(x,y,z)=\vec{v}_1\times\vec{v}_2$，则 $\operatorname{div}F=$_____.

【答案】1 + z

【解析】由题知 $F(x,y,z)=\begin{vmatrix}i & j & k\\0 & x & z\\y & 0 & 1\end{vmatrix}=x\,i+\mathrm{yz}\,j-\mathrm{xy}\,k$,

故 $\operatorname{div}F=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(-\mathrm{xy})}{\partial z}=1+z$。

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right)=$_____.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-\ln(1+x)}{\sin x\cdot x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]-\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}{x\cdot x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

13. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\sin^2 t\\ y=t+\cos t\end{cases}, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 所确定，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{t=\frac{\pi}{4}}=$_____.

【答案】$-\frac{\sqrt{2}}{8}$

【解析】

由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4\sin t\cos t=2\sin 2t$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1-\sin t$，

故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-\sin t}{2\sin 2t}=y'(t)$，

则 $\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-\cos t\sin 2t-(1-\sin t)2\cos 2t}{4\sin 2t(\sin 2t)^2}=\frac{-\cos t\sin 2t-2\cos 2t(1-\sin t)}{4(\sin 2t)^3}$，

当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{4}=-\frac{1}{4\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{8}$。

14. $\int_1^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x=$_____.

【答案】$2\ln 2$

【解析】

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_1^{\infty}\ln(x+1)\,d\left(-\frac{1}{x}\right)\\&=-\frac{\ln(1+x)}{x}|_1^{\infty}+\int_1^{\infty}\frac{1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x\\&=-(0-\ln 2)+\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\&=\ln 2+\left[\ln\frac{x}{1+x}\right]_1^{\infty}\\&=\ln 2+\left(0-\ln\frac{1}{2}\right)\\&=2\ln 2\end{aligned}$$

15. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&a&2\\0&2&a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a&-1&-1\\-1&2&1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$，设 $m(X)$ 为3阶矩阵 X 的实特征值中的最大值，若 $m(A)<m(B)$，则 a 的取值范围是 _____.

【答案】$a\in(-\infty,0)$

【解析】

由 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)[\lambda-(a-2)][\lambda-(a+2)]$，可得 A 的特征值为 $1,\ a-2,\ a+2$；

又 $|\lambda E-B|=(\lambda-2)[\lambda-(a-1)][\lambda-(a+1)]$，可得 B 的特征值为 $2,\ a-1,\ a+1$；

当 $a<-1$ 时，$m(A)=1,\ m(B)=2$，符合；

当 $-1,a<0$ 时，$m(A)=a+2,\ m(B)=2$，符合；

当 $0\le a<1$ 时，$m(A)=a+2,\ m(B)=2$，舍去；

当 $a,1$ 时，$m(A)=a+2,\ m(B)=a+1$，舍去；

综上，$a\in(-\infty,0)$。

16. 设随机变量 X 服从参数为1的泊松分布，随机变量 Y 服从参数为3的泊松分布，X 与 $Y-X$ 相互独立，则 $E(\mathrm{XY})=$____.

【答案】4

【解析】

由 X 与 $Y-X$ 独立，可知二者不相关，即 $\mathrm{Cov}(X,Y-X)=\mathrm{Cov}(X,Y)-D(X)=0$；

也即 $E(XY)-E(X)\cdot E(Y)-D(X)=0$；

所以 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)+D(X)=1\times3+1=4$。

三、解答题：17～22小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本题满分10分）

求函数 $f(x,y)=(2x^2-y^2)e^x$ 的极值。

【答案】$f(-2,0)=8e^{-2}$ 为极大值。

【解析】

由题可知，$f'_x=4\mathrm{x}e^x+(2x^2-y^2)e^x$，$f'_y=-2\mathrm{y}e^x$；

令 $\begin{cases}f'_x=0\\f'_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$；

又 $A=f''_{xx}=e^x(2x^2+8x+4-y^2)$，$B=f''_{xy}=-2\mathrm{y}e^x$，$C=f''_{yy}=-2e^x$；

故 $AC-B^2|_{(0,0)}=-8<0$，$\mathrm{AC}-B^2|_{(-2,0)}=8e^{-4}>0$ 且 $A_{(-2,0)}=-4e^{-2}<0$，

则 $(0,0)$ 为非极值点，$(-2,0)$ 为极大值点，且极大值 $f(-2,0)=\dfrac{8}{e^2}$。

18. （本题满分12分）

设 $f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内具有3阶连续导数，且存在可微函数 $F(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}F(x,y)=\frac{f(xy)}{x^2y}\mathrm{d}x+\frac{f''(xy)}{xy^2}\mathrm{d}y(xy>0).$$

（1）证明：$\dfrac{f''(u)}{u}-\dfrac{f(u)}{u}=C$，$C$ 为常数；

（2）设 $f(1)=1, f'(1)=-1, f''(1)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。

【答案】

（1）思路：利用 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$，令 $u=x\,y, G(u)=f''(u)-f(u)$，再解微分方程；

（2）$f(u)=e^{u-1}+e^{u+1}+u$。

【解析】

根据全微分性质，混合偏导数是相等的，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(\mathrm{xy})}{x^2 y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f''(\mathrm{xy})}{\mathrm{xy}^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(x\,y)}{x^2 y}\right)=\frac{x\,y\,f'(x\,y)-f(x\,y)}{x^2 y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f''(\mathrm{xy})}{\mathrm{xy}^2}\right)=\frac{\mathrm{xyf}'''(\mathrm{xy})-f''(\mathrm{xy})}{x^2 y^2}$$

将两边相等得到

$$\mathrm{xyf}'(\mathrm{xy})-f(\mathrm{xy})=\mathrm{xyf}'''(\mathrm{xy})-f''(\mathrm{xy}).$$

令 $u=\mathrm{xy}$,

$$\mathrm{uf}'(u)-f(u)=\mathrm{uf}'''(u)-f''(u).$$

两边同时除以 u（$u>0$），得

$$f'''(u)-\frac{f''(u)}{u}=f'(u)-\frac{f(u)}{u}.$$

等价为

$$f'''(u)-f'(u)=\frac{f''(u)}{u}-\frac{f(u)}{u}.$$

令 $g(u)=\dfrac{f''(u)}{u}-\dfrac{f(u)}{u}$，则 $g'(u)=0 \Longrightarrow g(x)$ 为常数。

（2）由（1）得

$$\frac{f''(u)}{u}-\frac{f(u)}{u}=C.$$

两边同时乘 u 得

$$f''(u)-f(u)=\mathrm{Cu}.$$

① 其特征方程为 $r^2-1=0$，解得 $r=\pm 1$。故齐次方程通解为 $y=C_1 e^u+C_2 e^{-u}$。

② 设特解 $A\,u+B$，代入得 $0-A\,u-B=\mathrm{Cu}$，解得 $A=-C$，$B=0$。故 $y^*=-\mathrm{Cu}$。

因此非齐次通解为 $y_{非齐}=y=C_1 e^u+C_2 e^{-u}-\mathrm{Cu}$。

由 $f(0)=1$，$f'(1)=-1$，$f''(1)=0$ 得 $C_1=-\dfrac{1}{e}$，$C_2=e$，$C=-1$。

19. （本题满分12分）

设有向曲线 L 为椭圆 $x^2+3y^2=1$ 上沿逆时针方向从点 $A\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 到点 $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 的部分，计算曲线积分 $I=\int_L (e^{x^2}\sin x-2xy)\mathrm{d}x+(6x-x^2-y\cos^4 y)\mathrm{d}y$。

【答案】$\sqrt{3}\pi-\frac{1}{4}$

【解析】已知 $P=e^{x^2}\sin x-2xy$，$Q=6x-x^2-y\cos^4 y$；

补直线段 BA：从 $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 到 $A\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，方向与 L 合成闭路（逆时针）。

画图！！

由格林公式：$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(6-2x)-(-2x)=6.$

闭路围成的区域 D 为直线 $y=x$ 与椭圆所围的一半椭圆，面积 $|D|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$，

于是 $\oint_{L\cup \mathrm{BA}} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D 6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=6\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}\pi$，

计算直线 BA 上的积分（参数 $x=t,y=t,t:\frac{1}{2}\to-\frac{1}{2}$）：

$$\int_{\mathrm{BA}} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{1/2}^{-1/2}(e^{t^2}\sin t-3t^2+6t-t\cos^4 t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{4}$$

因此 $I=\oint_{L\cup \mathrm{BA}}-\int_{\mathrm{BA}}=\sqrt{3}\pi-\left(-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{3}\pi+\frac{1}{4}$。

20. （本题满分12分）

设可导函数 $f(x)$ 严格单调递增且满足 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=0$，记 $a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。

（1）证明：$a>0$；

（2）设 $F(x)=a(1-x^2)+\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $F''(\xi)=0$。

【答案】

（1）思路：①对 $a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，令 $x=t$ 换元；② $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ 使用积分中值定理。

（2）思路：$F(-1)=F(0)=F(1)=0$，用罗尔定理。

【解析】

(1) 由 $f(x)$ 单增可知，$\forall x\in[-1,0)$，有 $f(x)<f(0)$，$\forall x\in(0,1]$，有 $f(x)>f(0)$；

故 $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x<\int_{-1}^0 f(0)\mathrm{d}x=f(0)$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>\int_0^1 f(0)\mathrm{d}x=f(0)$，

则 $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x<f(0)<\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$；

又因为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a$，代入不等式得 $-a<f(0)<a$，故 $|f(0)|<a$，则 $a>0$。

(2) 由题可知，$F(-1)=F(0)=F(1)=0$，又因为 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续且可导；

由罗尔定理可知：

$$F'(\xi_1)=0,\quad \xi_1\in(-1,0);$$

$$F'(\xi_2)=0,\quad \xi_2\in(0,1);$$

$$F''(\xi)=0,\quad \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,1)。$$

21. （本题满分 12 分）

已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，

$$G=(\alpha_1,\alpha_2)$$

（1）证明：α_1,α_2 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组；

（2）求矩阵 H 使得 $A=GH$，并求 A^{10}。

【答案】

（1）思路：证明 $r(A)=r(G)=2$；

（2）$H=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix},A^{10}=\begin{pmatrix}1&-8&-9&9\\0&-1&-1&1\\-1&9&10&-10\\-1&7&8&-8\end{pmatrix}$

【解析】

(1) 将 A 作初等行变换化为行最简得：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

则 $r(A)=2$，且 α_1,α_2 不成比例，故 α_1,α_2 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组，

α_3,α_4 可由 α_1,α_2 线性表示：$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$。

(2) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$，

则 $H=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$，$A^{10}=(GH)^{10}=G(HG)^9H$。

其中，$HG=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$，$(HG)^9=\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}$，

从而 $A^{10}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-8&-9&9\\0&-1&-1&1\\-1&9&10&-10\\-1&7&8&-8\end{pmatrix}$。

解答. (**By Jack Yansong Li**)

By observation, $\alpha_3+\alpha_4=0$, which means α_3 and α_4 are linear dependent. By observation, $\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3$, which means $\operatorname{rank}(A)\le 2$. The left is to show that α_1 and α_2 are linear independent, trivial.

By definition

$$G=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 2},\quad A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&1\\-1&0&1&-1\\-1&-2&-1&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Therefore, $H\in\mathbb{R}^{2\times 4}$, $H\overset{\text{rep}}{=}\begin{pmatrix}h_1&h_2&h_3&h_4\end{pmatrix}$. From $h_1=\begin{pmatrix}h_1^{(1)}\\h_1^{(2)}\end{pmatrix}$, we have

$$Gh_1=h_1^{(1)}\alpha_1+h_1^{(2)}\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}\Longrightarrow h_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Similarly, $h_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $h_3=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, and $h_4=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. In conclusion,

$$H=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}.$$

By observation, $HG\in\mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$HG=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-1&0\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow(HG)^9=\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$A^{10}=(GH)^{10}=G(HG)^9H=\begin{pmatrix}1&-8&-9&9\\0&-1&-1&1\\-1&9&10&-10\\-1&7&8&-8\end{pmatrix}$$

22. （本题满分 12 分）

假设某种元件的寿命服从指数分布，其均值 θ 是未知参数，为估计 $\hat{\theta}$，取 n 个这种元件同时做寿命试验，试验到出现 $k(1\le k\le n)$ 个元件失效时停止。

（1）若 $k=1$，失效元件寿命记为 T。

(i) 求 T 的概率密度；

(ii) 确定 a，使 $\hat{\theta}=aT$ 是 θ 的无偏估计，并求 $D(\hat{\theta})$。

（2）已知 k 个失效元件的寿命值分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_k$，且 $t_1\le t_2\le\cdots\le t_k$，似然函数为

$$L(\theta)=\frac{1}{\theta^k}e^{-\frac{1}{\theta}[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k]}$$

求 θ 的最大似然估计值。

【答案】

（1）(i) $f_T(t)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$，即 $T\sim E\left(\frac{n}{\theta}\right)$；(ii) $a=n, D(\hat{\theta})=\theta^2$。

（2）$\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$

【解析】

（1） (i) 设某元件寿命为 $X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，这 n 个元件的寿命记为 $X_1,X_2,\ldots,X_n$，则 $X_1,X_2\ldots X_n$ 相互独立且与 X 同分布。

当 $k=1$ 时，$T=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$；

则 $\begin{aligned}F_T(t)&=P\{T\le t\}\\&=P\{\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}\le t\}\\&=1-P\{\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}>t\}\\&=1-P\{X_1>t,X_2>t,\ldots,X_n>t\}\\&=1-[P\{X>t\}]^n\\&=1-[1-F_X(t)]^n\end{aligned}$

$$F_X(t)=\begin{cases}1-e^{-\frac{t}{\theta}} & t\ge 0\\ 0 & \text{other}\end{cases}\Rightarrow F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-\frac{n}{\theta}t} & t\ge 0\\ 0 & \text{other}\end{cases}\Rightarrow f_T(t)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}t} & t\ge 0\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

（ii）$E(\hat{\theta})=\mathrm{aE}(T)=a\int_0^{\infty}t\cdot\frac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}t}\mathrm{d}t=a\cdot\frac{\theta}{n}=\theta\Rightarrow a=n$

$D(\hat{\theta})=a^2D(T)=a^2[E(T^2)-(\mathrm{ET})^2]$

其中 $E(T^2)=\int_0^{\infty}t^2\cdot\frac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}t}\mathrm{d}t=\frac{2\theta^2}{n^2}$，则 $D(\hat{\theta})=n^2\left[\frac{2\theta^2}{n^2}-\frac{\theta^2}{n^2}\right]=\theta^2$

(2) $L(\theta)=\frac{1}{\theta^k}e^{-\frac{1}{\theta}[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k]}$,

则 $\ln L(\theta)=-k\ln\theta-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$,

那么 $\frac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{d\theta}=-\frac{k}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]=0\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$,

因此 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}=\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]$。